УДК 517.956.4
МРНТИ:27.31.44

М.Д.КОШАНОВА[1], М.А.МУРАТБЕКОВА[2], Б.Х.ТУРМЕТОВ[3]

[1]кандидат технических наук, доцент, E-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
[2]PhD, старший преподаватель, E-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz
[3]доктор физико-математических наук, профессор, E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
Международный казахско-турецкий университет имени Ходжа Ахмеда Ясави

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Настоящая работа посвящена к исследованию вопросов разрешимости нелокальной задачи для двумерного уравнения теплопроводности с инволюцией. Задача решается сведением ее к двум эквивалетным задачам для классического двумерного уравнения теплопроводности. Изучены свойства системы собственных и присоединенных функций спектральной задачи связанный с нелокальными условиями. Доказана теорема о существовании и единственности решения. Решение задачи представляется в виде ряда Фурье.

Ключевые слова: инволюция, уравнение диффузии, нелокальная задача, ряд Фурье, существование решения, единственность решения.

M.D.KOSHANOVA[1], M.A.MURATBEKOVA[2], B.KH.TURMETOV[3]

[1]Cand.Sci., Associate Professor, E-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
[2]PhD, senior lecturer, E-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz
[2]doctor of physical and mathematical sciences, professor, E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University

ON THE SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION WITH INVOLUTION

This work is devoted to the study of the solvability of a nonlocal problem for a two-dimensional heat equation with involution. The problem is solved by reducing it to two equivalent problems for the classical two-dimensional heat equation. The properties of the system of eigenfunctions and associated functions of the spectral problem associated with nonlocal conditions are studied. The theorem on the existence and uniqueness of the solution is proved. The solution to the problem is represented in the form of a Fourier series.

Key words: involution, diffusion equation, nonlocal problem, Fourier series, existence of a solution, uniqueness of a solution.

М.Д.ҚОШАНОВА[1], М.А.МҰРАТБЕКОВА[2], Б.Х.ТҰРМЕТОВ[3]

[1]техника ғылымдарының кандидаты, доцент, E-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz
[2]PhD, аға оқытушы, E-mail: moldir.muratbekova@ayu.edu.kz
[3]физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті

ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ЕКІ ӨЛШЕМДІ ДИФФУЗИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН БЕЙЛОКАЛ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыс инволюция бар екі өлшемді диффузиялық теңдеуі үшін бейлокал есептің шешімділігін зерттеуге арналған. Есеп оны классикалық екі өлшемді жылу теңдеуі үшін екі эквиваленттік есептерге келтіру арқылы шешіледі. Бейлокал шарттармен байланысты спектрлік есептің меншікті және тіркелген функциялары жүйесінің қасиеттері зерттелген. Шешімнің бар және жалғыз болуы туралы теорема дәлелденді. Есептің шешімі Фурье қатары түрінде анықталған.

Түйінді сөздер: инволюция, диффузиялық теңдеу, бейлокал есеп, Фурье қатары, шешімнің бар болуы, шешімнің жалғыз болуы.

1. Постановка задачи.

Хотя исследование нелокальных уравнений имеет достаточно давнюю историю (см. [1]), понятие нелокального оператора и связанное с ним понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно.

В настоящее время к числу нелокальных дифференциальных уравнений относятся такие уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят, вообще говоря, при различных значениях аргументов и примерами таких уравнений являются нагруженные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения дробного порядка, уравнения с отклоняющимися аргументами и т.п. [2, стр. 89].

Заметим, что к подобным нелокальным уравнениям сводятся некоторые задачи интегральной геометрии, обратные задачи кинематической сейсмики и геофизики, задачи колебания, задачи теории упругости, теории магнитогидродинамических течений, теории распространения упругих электромагнитных волн, описываемых уравнением Максвелла с памятью, теории пластичности и ползучести и другие (см. например, [3] - [6]).

Среди дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами особое место занимают уравнения, в которых отклонение аргументов носит знакопеременный характер. К числу таких отклонений относится так называемое отклонение инволютивного типа и возникают в теории фильтрации, теории прогнозирования, а также при изучении субгармонических колебаний (см. [7] - [10]).

В настоящее работе исследуется вопросов разрешимости нелокальной задачи для двумерного уравнения теплопроводности с инволюцией. Аналогичные задачи в одномерном случае исследовались в работах [11-20].

Переходим к постановке задачи которую будем рассматривать в данной работе. Пусть $0<T$ - действительное число, $\Pi=\{(x,y):0<x,y<1\}$, $Q=(0,T)\times\Pi$.

Введем класс функции

$$W=\left\{u(t,x,y):u\in C\left(\bar{Q}\right),u_x\in C\left(\bar{\Omega}\right),D_t^{\alpha}u,u_{xx},u_{yy}\in C(\Omega)\right\}.$$

Рассмотрим в области Q следующую задачу.

Задача ID. Найти функцию $u(t,x,y)$ из класса W и удовлетворяющую условиям

$$u_t(t,x,y)-a_0\Delta u(t,x,y)-a_1\Delta u(t,x,1-y)=f(t,x,y),\ \ (t,x,y)\in Q. \qquad (1.1)$$

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),(x,y)\in\bar{\Pi}, \qquad (1.2)$$

$$u(t,0,y)=u(t,1,y), u_x(t,1,y)=0, 0\le t\le T, 0\le y\le 1, \tag{1.3}$$

$$u(t,x,0)=u(t,x,1)=0, 0\le t\le T, 0\le x\le 1. \tag{1.4}$$

Здесь $f(x,y), \varphi(x)$ - заданные функции.

Отметим, что задача (1.1) - (1.4) в случае $a_0=1, a_1=0$ изучена в работе [21], а в случае дробных параболических уравнений в работах [22,23].

2. Вспомогательные задачи.

В этом пункте мы приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть

$$X_0(x)=2, Y_k(y)=\sqrt{2}\sin(k\pi y), X_m(x)=4\cos(2m\pi x),$$

$$X_{2m}(x)=4(1-x)\sin(2m\pi x), \tilde{X}_0(x)=x, \tilde{X}_m(x)=x\cos(2m\pi x),$$

$$\tilde{X}_{2m}(y)=\mathrm{s}\,in(2m\pi x), m,k\in N.$$

Обозначим

$$Z_{0,k}(x,y)=X_0(x)Y_k(y), Z_{2m-1,k}(x,y)=X_m(x)Y_k(y), Z_{2m,k}(x,y)=X_{2m}(x)Y_k(y), m,k=1,2,..., \tag{2.1}$$

$$W_{0,k}(x,y)=\tilde{X}_0(x)Y_k(y), W_{2m-1,k}(x,y)=\tilde{X}_m(x)Y_k(y), W_{2m,k}(x,y)=\tilde{X}_{2m}(x)Y_k(y), m,k=1,2,.... \tag{2.2}$$

В работе [21] доказано, что последовательности функций (2.1), (2.2) образуют биортонормированную на множестве Π систему функций.

Пусть функция $\varphi(x,y)\in L_2(\Pi)$ и φ_{mk} коэффициенты биортогонального разложения функции по базису $Z_{mk}(x,y)$, т.е.

$$\varphi_{mk}=(\varphi, W_{mk})\equiv\int_0^1\int_0^1\varphi(x,y)W_{mk}(x,y)dxdy, m=0,1,...,k=1,2,....$$

Введем функции

$$\varphi^{\pm}(x,y)=\varphi(x,y)\pm\varphi(x,1-y). \tag{2.3}$$

Тогда для функции $\varphi^+(x,y)$ имеем

$$\varphi^+_{mk}=\int_0^1\int_0^1[\varphi(x,y)+\varphi(x,1-y)]W_{mk}(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1\varphi(x,y)[W_{mk}(x,y)+W_{mk}(x,1-y)]dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\varphi(x,y)\tilde{X}_m(x)[Y_k(y)+Y_k(1-y)]dxdy.$$

Далее, так как

$$Y_k(y)+Y_k(1-y)=\sqrt{2}\sin k\pi y+\sqrt{2}\sin k\pi(1-y)=\sqrt{2}\sin k\pi y\left[1+(-1)^{k+1}\right],$$

то

$$\varphi^{+}_{m,2k}=0, \varphi^{+}_{m,2k-1}=\left(\varphi, W_{m,2k-1}\right)\equiv 2\varphi_{m,2k-1}, k=1,2,\dots . \qquad (2.4)$$

Аналогично для функции $\varphi^{-}(x,y)$ имеем

$$\varphi^{+}_{m,2k-1}=0, \varphi^{+}_{m,2k}=\left(\varphi, W_{m,2k}\right)\equiv 2\varphi_{m,2k}, k=1,2,\dots . \qquad (2.5)$$

3. Исследование основной задачи

В этом пункте исследуем основную задачу. Пусть функция $u(t,x,y)$ является решением задачи ID. Меняя в уравнении (1.1) точку (t,x,y) на $(t,x,1-y)$ для функции $u(t,x,y)$ получаем следующую систему

$$\begin{cases} u_t(t,x,y)-a_0\Delta u(t,x,y)-a_1\Delta u(t,x,1-y)=f(t,x,y) \\ u_t(t,x,1-y)-a_1\Delta u(t,x,y)-a_0\Delta u(t,x,1-y)=f(t,x,1-y) \end{cases}. \qquad (3.1)$$

Пусть

$$u^{\pm}(t,x,y)=u(t,x,y)\pm u(t,x,1-y),$$

Заметим, что если $u(t,x,y)$ удовлетворяет условиям (1.2) - (1.4), то

$$u^{\pm}(0,x,y)=u(0,x,y)\pm u(0,x,1-y)=\varphi(x,y)\pm\varphi(x,1-y)=\varphi^{\pm}(x,y),$$

$$u^{\pm}(t,0,y)=u(t,0,y)\pm u(t,0,1-y)=u(t,1,y)\pm u(t,1,1-y)=u^{\pm}(t,1,y), 0\le t\le T, 0\le y\le 1,$$

$$u^{\pm}_x(t,1,y)=u_x(t,1,y)\pm u_x(t,1,1-y)=0, 0\le t\le T, 0\le y\le 1,$$

$$u^{\pm}(t,x,0)=u(t,x,0)\pm u(t,x,1)=0, u^{\pm}(t,x,1)=u(t,x,1)\pm u(t,x,0)=0.$$

Из системы (3.1) для функций $u^{+}(t,x,y)$ получаем следующие уравнения

$$u^{\pm}_t(t,x,y)-(a_0\pm a_1)\Delta u^{\pm}(t,x,y)=f^{\pm}(t,x,y), \qquad (3,2)$$

где $f^{\pm}(t,x,y)$ определяется равенством (2.3).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $u(t,x,y)$ является решением задачи ID. Тогда функции $u^{\pm}(t,x,y)$ удовлетворяют условиям следующей задачи:

$$u_t^{\pm}(t,x,y)(t,x,y)-(a_0\pm a_1)\Delta u^{\pm}(t,x,y)=f^{\pm}(t,x,y),(t,x,y)\in Q\,, \qquad (3.3\pm)$$

$$u^{\pm}(0,x,y)=\varphi^{\pm}(x,y),(x,y)\in\overline{\Pi}\,, \qquad (3.4\pm)$$

$$u^{\pm}(t,0,y)=u^{\pm}(t,1,y),u_x^{\pm}(t,1,y)=0,0\le t\le T,0\le y\le 1, \qquad (3.5\pm)$$

$$u^{\pm}(t,x,0)=u^{\pm}(t,x,1)=0,0\le t\le T,0\le x\le 1. \qquad (3.6\pm)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия $a_0\pm a_1>0$, а функции $f^{\pm}(t,x,y)$ и $\varphi^{\pm}(x,y)$ определяются равенствами (2.3). Если функция $u^{+}(t,x,y)$ является решением задачи (3.3$^+$) - (3.6$^+$), а функция $u^{-}(t,x,y)$ являются решением задачи (3.3$^-$) - (3.6$^-$), то функция

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(t,x,y)+u^{-}(t,x,y)\right] \qquad (3.7)$$

удовлетворяет условиям задачи ID.

Доказательство. Пусть функции $u^{+}(t,x,y)$ и $u^{-}(t,x,y)$ являются решениями задач (3.3$\pm$) - (3.6$\pm$) соответственно. Тогда для функции $u(t,x,y)$ из (3.7) имеем

$$u_t(t,x,y)-a_0\Delta u(t,x,y)-a_1\Delta u(t,x,1-y)=\frac{1}{2}\left[u_t^{+}(t,x,y)+u_t^{-}(t,x,y)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}a_0\left[\Delta u^{+}(t,x,y)+\Delta u^{-}(t,x,y)\right]-\frac{1}{2}a_1\left[\Delta u^{+}(t,x,y)+\Delta u^{-}(t,x,y)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[u_t^{+}(t,x,y)-(a_0+a_1)\Delta u^{+}(t,x,y)\right]+\frac{1}{2}\left[u_t^{-}(t,x,y)-(a_0-a_1)\Delta u^{-}(t,x,y)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}f^{+}(t,x,y)+\frac{1}{2}f^{-}(t,x,y)=f(t,x,y)\,.$$

Далее,

$$u(0,x,y)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(0,x,y)+u^{-}(0,x,y)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi^{+}(x,y)+\varphi^{-}(x,y)\right]=\varphi(x,y)\,,$$

$$u(t,0,y)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(t,0,y)+u^{-}(t,0,y)\right]=\frac{1}{2}\left[u^{+}(t,1,y)+u^{-}(t,1,y)\right]=u(t,1,y),$$

$$u_x(t,1,y)=\frac{1}{2}\left[u_x^{+}(t,1,y)+u_x^{-}(t,1,y)\right]=0\,,$$

$$u(t,x,0)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(t,x,0)+u^{-}(t,x,0)\right]=0,u(t,x,1)=\frac{1}{2}\left[u^{+}(t,x,1)+u^{-}(t,x,1)\right]=0\,.$$

Таким образом, функция $u(t,x,y)$ из (3.7) удовлетворяет всем условиям задачи ID. Теорема доказана.

Таким образом, для нахождения решения задачи ID нам достаточно решит задачи (3.3$\pm$) - (3.6$\pm$).

Пусть $\rho > 0$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

$$v_t(t,x,y) - \rho\Delta v(t,x,y) = g(t,x,y), (t,x,y) \in Q, \tag{3.8}$$

$$v(0,x,y) = h(x,y), (x,y) \in \bar{\Pi}, \tag{3.9}$$

$$v(t,0,y) = v(t,1,y), v_x(t,1,y) = 0, 0 \le t \le T, 0 \le y \le 1, \tag{3.10}$$

$$v(t,x,0) = v(t,x,1) = 0, 0 \le t \le T, 0 \le x \le 1. \tag{3.11}$$

В работе [21] доказана следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $g(t,x,y) \in L_2(Q), h(x,y) \in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ и выполняются условия $h(0,y) = h(1,y), h_x(0,y) = 0, 0 \le y \le 1, h(x,0) = h(x,1) = 0, 0 \le x \le 1$. Тогда решение задачи (3.8)-(3.11) существует, единственно и представляется в виде

$$v(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{0k} e^{-\mu_{0k}\rho t} Z_{0k}(x,y) + \sum_{m,k=1}^{\infty} h_{2mk} e^{-\mu_{mk}\rho t}\left[Z_{2mk}(x,y) - 2\sqrt{\gamma_m} Z_{(2m-1)k}(x,y)\right] +$$

$$+\sum_{m,k=1}^{\infty} h_{(2m-1)k} e^{-\rho\mu_{mk}t} Z_{(2m-1)k}(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t g_{0k}(\tau) e^{-\rho\mu_{0k}(t-\tau)} d\tau Z_{0k}(x,y) +$$

$$+\sum_{k,m=1}^{\infty}\int_0^t \left(g_{(2m-1)k}(\tau) - 2\sqrt{\gamma_m}(t-\tau) g_{2mk}(\tau)\right) e^{-\rho\mu_{mk}(t-\tau)} d\tau Z_{(2m-1)k}(x,y) +$$

$$+\sum_{k,m=1}^{\infty}\int_0^t g_{2mk}(\tau) e^{-\rho\mu_{mk}(t-\tau)} d\tau Z_{2mk}(x,y),$$

где $h_{km} = \left(h, W_{k,m}\right)$, $g_{km}(t) = \left(g, W_{k,m}\right)$, $\mu_{km} = \gamma_m + \lambda_k = \left(2\pi m\right)^2 + \left(\pi k\right)^2, m = 0,1,...,k = 1,2,...$.

Теперь применим этот результат для решений задач (3.3$\pm$) - (3.6$\pm$).

В случае задачи (3.3$^+$) - (3.6$^+$) получаем

$$u^+(t,x,y) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0,2k-1} e^{-\rho_0\mu_{0,2k-1}t} Z_{0,2k-1}(x,y) + 2\sum_{m,k=1}^{\infty} \varphi_{2m-1,2k-1} e^{-\rho_0\mu_{m,2k-1}t} Z_{2m-1,2k-1}(x,y) +$$

$$+2\sum_{m,k=1}^{\infty} \varphi_{2m,2k-1} e^{-\rho_0\mu_{m,2k-1}t}\left[Z_{2m,2k-1,}(x,y) - 2\sqrt{\gamma_m} Z_{2m-1,2k-1}(x,y)\right] +$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_{0,2k-1}(\tau)e^{-\rho_0\mu_{0,2k-1}(t-\tau)}d\tau Z_{0,2k-1}(x,y)+2\sum_{m,k=1}^{\infty}\int_0^t f_{2m,2k-1}(\tau)e^{-\rho_0\mu_{m,2k-1}(t-\tau)}d\tau Z_{2m,2k-1}(x,y)+.$$

$$+2\sum_{k,m=1}^{\infty}\int_0^t\Big(f_{2m-1,2k-1}(\tau)-2\sqrt{\gamma_m}(t-\tau)f_{2m,2k-1}(\tau)\Big)e^{-\rho_0\mu_{m,2k-1}(t-\tau)}d\tau Z_{2m-1,2k-1}(x,y), \quad (3.12)$$

и аналогично в случае задачи (3.3$^-$) - (3.6$^-$) имеем

$$u^-(t,x,y)=2\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{0,2k}e^{-\rho_1\mu_{0,2k}t}Z_{0,2k}(x,y)+2\sum_{m,k=1}^{\infty}\varphi_{2m-1,2k}e^{-\rho_1\mu_{m,2k}t}Z_{2m-1,2k}(x,y)+$$

$$+2\sum_{m,k=1}^{\infty}\varphi_{2m,2k}e^{-\rho_1\mu_{m,2k}t}\Big[Z_{2m,2k}(x,y)-2\sqrt{\gamma_m}Z_{2m-1,2k}(x,y)\Big]+$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_{0,2k}(\tau)e^{-\rho_1\mu_{0,2k}(t-\tau)}d\tau Z_{0,2k}(x,y)+2\sum_{m,k=1}^{\infty}\int_0^t f_{2m,2k}(\tau)e^{-\rho_1\mu_{m,2k}(t-\tau)}d\tau Z_{2m,2k}(x,y)+.$$

$$+2\sum_{k,m=1}^{\infty}\int_0^t\Big(f_{2m-1,2k}(\tau)-2\sqrt{\gamma_m}(t-\tau)f_{2m,2k}(\tau)\Big)e^{-\rho_1\mu_{m,2k}(t-\tau)}d\tau Z_{2m-1,2k}(x,y), \quad (3.13)$$

где $\rho_0=a_0+a_1,\rho_1=a_0-a_1$, $\varphi_{km}=\left(\varphi,W_{k,m}\right)$, $f_{km}(t)=\left(f,W_{k,m}\right)$, $\mu_{km}=\gamma_m+\lambda_k=\left(2\pi m\right)^2+$ $+\left(\pi k\right)^2$, $m=0,1,...,k=1,2,...$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $f(t,x,y)\in L_2(Q),\varphi(x,y)\in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ и выполняются условия $a_0\pm a_1>0$, $\varphi(0,y)=\varphi(1,y),\varphi_x(0,y)=0,0\le y\le 1,\varphi(x,0)=\varphi(x,1)=0,0\le x\le 1$. Тогда решение задачи ID существует, единственно и представляется в виде

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2}\Big[u^+(t,x,y)+u^-(t,x,y)\Big]$$

где функции $u^+(t,x,y)$ и $u^-(t,x,y)$ определяются соответственно равенствами (3.12) и (3.13).

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант № AP08855810.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Babbage Ch. An essay towards the calculus of functions. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1816, vol. 11, pp. 179–226.
2. Нахушев А.М.Уравнения математической биологии.-М.: Высшая шк.,1995. -301 с.
3. Алексеев, А.С. Об одной постановке кинематической задачи сейсмики для двумерной непрерывно-неоднородной среды / А.С.Алексеев, А.О. Белоносова //В сб.: Некоторые

методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. — Новосибирск: Наука, 1967.
4. Коган, М.Н. О магнитогидродипамических течениях смешанного типа /М.Н.Коган // ПММ, 1961. Т. 25, № 1. - С. 132-137.
5. Рвачев, В.А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применения / В.А. Рвачев // Успехи мат. наук, 1990. —Т. 45, Вып. 1. С. 77-10
6. Ленский, В.С. Распространение одномерных волн в материалах с запаздывающей текучестью / В.С. Ленский, Л.Н. Фомина // Изв. АН СССР.ОТН сер. мех. мат, 1959. № 3.
7. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // Transactions of the ASME. Ser. D, Journal of basic engineering. --1961. --V. 86. -- P. 95–108.
8. Przeworska-Rolewicz D. Equations with transformed argument: Algebraic approach. Amsterdam. Warsawa. 1973. 354 p.
9. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука. 1964. 367 с.
10. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York. 1996. 412 p.
11. Al-Salti N., Kirane M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics. –2019. V. 48, No.3. – P. 669 – 681.
12. Aftabizadeh A.R., Huang a Y.K., Wiener J. Bounded solutions for differential equations with reflection of the argument // Journal of Mathematical Analysis and Applications. –1988. -V.135, No. 1. –P. 31–37.
13. Andreev A. A. Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument// Differential Equations. --2004. –V.40, No. 8. –P. 1192–1194.
14. Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution, Electronic Journal of Differential Equations. –2015. No.284. --P.1–8.
15. Бурлуцкая М. Ш. Некоторые свойства функционально-дифференциальных операторов с инволюцией ν(x) = 1 - x и их приложения // Известия высших учебных заведений. Математика. --2021. -- № 5. –С. 89–97.
16. Бурлуцкая М.Ш. О некоторых свойствах дифференциальных уравнений и смешанных задач с инволюцией // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. -- 2019. № 1. --С. 91-97.
17. Burlutskaya M., Khromov A. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution //Computational Mathematics and Mathematical Physics. –2011. –V. 51. -- P.2102– 2114.
18. Cabada A. , Tojo F. On linear differential equations and systems with reflection // Applied Mathematics and Computation. -- 2017). –V. 305. –P. 84–102.
19. Kirane M., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. A nonlocal fractional Helmholtz equation // Fractional Differential Calculus. –2017. –V.7, No.2. –P. 225–234.
20. Kopzhassarova A., Sarsenbi A. M. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution // Abstract and Applied Analysis. –2012. No.6. –P. 1–3.
21. Ионкин Н. И., Морозова В. А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференцальные уравнения. –2000. –Т. 36, № 7. –С. 884–888.

22. Kirane M., Malik S.A., Al-Gwaiz M. An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2012. – V. 36, No.9. – P. 1056 – 1069.
23. Malik S.A., Aziz S. An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Computers & Mathematics with Applications. – 2017. – V. 73, No.12. – P. 2548 – 2560.

REFERENCES

1. Babbage Ch. An essay towards the calculus of functions. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1816, vol. 11, pp. 179–226.
2. Nahushev A.M. Uravnenija matematicheskoj biologii. -M.: Vysshaja shk., 1995. -301 s.
3. Alekseev, A.S. Ob odnoj postanovke kinematicheskoj zadachi sejsmiki dlja dvumernoj nepreryvno-neodnorodnoj sredy / A.S.Alekseev, A.O. Belonosova //V sb.: Nekotorye metody i algoritmy Interpretacii geofizicheskih dannyh. — Novosibirsk: Nauka, 1967.
4. Kogan, M.N. O magnitogidrodipamicheskih techenijah smeshannogo tipa /M.N.Kogan // PMM, 1961. T. 25, # 1. - S. 132-137.
5. Rvachev, V.A. Finitnye reshenija funkcional'no-differencial'nyh uravnenij i ih primenenija / V.A. Rvachev // Uspehi mat. nauk, 1990. —T. 45, Vyp. 1. S. 77-10
6. Lenskij, B.C. Rasprostranenie odnomernyh voln v materialah s zapazdyvajushhej tekuchest'ju / B.C. Lenskij, L.N. Fomina // Izv. AN SSSR.OTH ser. meh. mat, 1959. # 3.
7. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory //Transactions of the ASME. Ser. D, Journal of basic engineering. --1961. --V. 86. -- P. 95–108.
8. Przeworska-Rolewicz D. Equations with transformed argument: Algebraic approach. Amsterdam. Warsawa. 1973. 354 p.
9. Pliss V.A. Nelokal'nye problemy teorii kolebanij. M.: Nauka. 1964. 367 c.
10. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. New York. 1996. 412 p.
11. Al-Salti N., Kirane M., Torebek B.T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics. –2019. V. 48, No.3. – P. 669 – 681.
12. Aftabizadeh A.R., Huang a Y.K., Wiener J. Bounded solutions for differential equations with reflection of the argument // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1988. -V.135, No. 1. –P. 31–37.
13. Andreev A. A. Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument// Differential Equations. --2004. –V.40, No. 8. –P. 1192–1194.
14. Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution, Electronic Journal of Differential Equations. –2015. No.284. --P.1–8.
15. Burluckaja M. Sh. Nekotorye svojstva funkcional'no-differencial'nyh operatorov c involjuciej $\nu(x) = 1 - x$ i ih prilozhenija // Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika. --2021. -- # 5. –C. 89–97.
16. Burluckaja M.Sh. O nekotoryh svojstvah differencial'nyh uravnenij i smeshannyh zadachs involjuciej // Vestnik VGU. Serija: Fizika. Matematika. -- 2019. # 1. --C. 91-97.
17. Burlutskaya M., Khromov A. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution //Computational Mathematics and Mathematical Physics. –2011. –V. 51. -- P.2102– 2114.

18. Cabada A. , Tojo F. On linear differential equations and systems with reflection // Applied Mathematics and Computation. -- 2017). –V. 305. –P. 84–102.
19. Kirane M., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. A nonlocal fractional Helmholtz equation // Fractional Differential Calculus. –2017. –V.7, No.2. –P. 225–234.
20. Kopzhassarova A., Sarsenbi A. M. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution // Abstract and Applied Analysis. –2012. No.6. –P. 1–3.
21. Ionkin N. I., Morozova V. A. Dvumernoe uravnenie teploprovodnosti s nelokal'nymi kraevymi uslovijami // Differencal'nye uravnenija. –2000. –T. 36, # 7. –S. 884–888.
22. Kirane M., Malik S.A., Al-Gwaiz M. An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2012. – V. 36, No.9. – P. 1056 – 1069.
23. Malik S.A., Aziz S. An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Computers & Mathematics with Applications. – 2017. – V. 73, No.12. – P. 2548 – 2560.