УДК 517.956
ГРНТИ 27.31.55

https://orcid.org/0000-0003-1752-7848
У.К.КОЙЛЫШОВ[1] , К.А.БЕЙСЕНБАЕВА[2]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан.
[2]Казахская академия логистики и транспорта, Алматы, Казахстан.
e-mail: koylyshov@mail.ru, beisenbaeva@mail.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами и вырождающиеся уравнения параболического типа, каждое в отдельности давно и хорошо исследуются. Начально-краевые задачи для вырождающегося уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами мало изучены.

Данная работа посвящена исследованию одной задачи сопряжения для вырождающегося уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Сначала с помощью преобразование Фурье и Лапласа строится решение двух вспомогательных задач, затем используя решения вспомогательных задач найдена решение задачи сопряжения для вырождающегося уравнения теплопроводности. Построено фундаментальное решение поставленной задачи и найдена оценка ее производных. Полученный результат используются при изучении начально-краевых задач для вырождающегося уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами в соболевских и гельдеровских классах.

Ключевые слова. Задача сопряжения, уравнения теплопроводности, вырождающиеся уравнения, разрывные коэффициенты.

У.К.КОЙЛЫШОВ[1] , К.А.БЕЙСЕНБАЕВА[2]

[1]әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы, Қазақстан.
[2] Қазақ логистика және көлік академиясы, Алматы, Қазақстан.
e-mail: koylyshov@mail.ru, beisenbaeva@mail.ru

ӨЗГЕШЕЛЕНГЕН ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН БІР ТҮЙІНДЕС ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІ

Коэффициенттері үзілісті жылуөткізгіштік есептері және өзгешеленген параболалық типтес теңдеулер, әрқайсысы жеке бұрыннан және жақсы зерттелген. Коэффициенттері үзілісті өзгешеленген жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептер іс жүзінде аз зерттелген.

Бұл жұмыс коэффициенттері үзілісті өзгешеленген жылуөткізгіштік теңдеу үшін бір түйіндес есепті зерттеуге арналған. Алдымен Фурье және Лаплас түрлендірулері көмегімен екі көмекші есептердің шешімдері құрылады, сонан соң көмекші есептердің шешімдерін қолдана отырып өзгешеленген жылуөткізгіштік теңдеу үшін бір түйіндес есептің шешімі табылады. Қойылған есептің іргелі шешімі құрылған және оның туындыларының бағасы табылған. Алынған нәтиже соболев және гельдер кластарында

коэффициенттері үзілісті өзгешеленген жылуөткізгіштік теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептерді зерттеу барысында қолданылады.

Кілттік сөздер. Түйіндес есеп, жылуөткізгіштік теңдеу, өзгешеленген теңдеу, үзілісті коэффициент.

U.K.KOILYSHOV[1] , K.A.BEISENBAEVA[2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
[2]Kazakh Akademy of logistics and transport , Almaty, Kazakhstan.
e-mail: koylyshov@mail.ru, beisenbaeva@mail.ru

SOLUTION OF ONE CONJUGATION PROBLEM FOR A DEGENERATE HEAT EQUATION

Problems of thermal conductivity with discontinuous coefficients and degenerate equations of parabolic type, each separately, have long been well studied. Initial-boundary value problems for the degenerate heat equation with discontinuous coefficients are practically not studied.

This paper is devoted to the study of a conjugation problem for a degenerate heat equation with discontinuous coefficients. First, the solution of two auxiliary problems is constructed using the Fourier transform and Laplace transform, then the solution of the conjugation problem for the degenerate heat equation is found using the solutions of auxiliary problems. A fundamental solution of the problem is constructed and an estimate of its derivatives is found. The obtained result is used in the study of initial-boundary value problems for the degenerate heat equation with discontinuous coefficients in the Sobolev and Helder classes.

Keywords. Problem conjugation, heat conduction equation, degenerate equations, discontinuous coefficients.

Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа с разрывными коэффициентами изучены в работах [1-8]. Вырождающимся по времени уравнениям теплопроводности посвящены работы [9-10]. Задачи сопряжения для вырождающегося по времени уравнениям параболического типа с разрывными коэффициентами мало изучены.

В статье [2], методом потенциалов и сведением к интегральному уравнению доказано корректность одной начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом в полуплоскости.

Установлению априорных оценок решения задачи Коши для уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами через норму известных функций в соболевских $W_2^{2,1}$ - классах посвящена работа [6].

В данной работе рассматривается одна задача сопряжения для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами вырождающееся в начальный момент времени в n - мерном пространстве.

Построено фундаментальное решение данной задачи и получены оценки ее производных.

Постановка задачи.

Рассматривается следующая задача: требуется найти функции $u_1(x,t), u_2(x,t)$ в области $D_{n+1}(x \in R^n, t > 0),$ удовлетворяющие уравнениям:

$$t^p \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \Delta u_1 + f_1(x,t), (x,t) \in D_{n+1}^- = \left\{(x,t), x' \in R^{n-1}, x_n < 0, t > 0\right\}, \tag{1}$$

$$t^p \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \Delta u_2 + f_2(x,t), (x,t) \in D_{n+1}^+ = \left\{(x,t), x' \in R^{n-1}, x_n > 0, t > 0\right\} \tag{2}$$

начальным условиям:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \tag{3}$$

и условиям сопряжения:

$$u_1\Big|_{x_n=-0} = u_2\Big|_{x_n=+0}, \tag{4}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\Big|_{x_n=-0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\Big|_{x_n=+0}, \tag{5}$$

где $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $k_i > 0,\ i = 1,2;\ p < 1.$

Особенность задачи заключается в том, что уравнения (1) и (2) с разрывными коэффициентами и в начальный момент $t = 0$ вырождаются.

Метод решения.

Для решения задачи (1)-(5) сначала рассмотрим вспомогательную задачу А: требуется найти функции $u_1(x,t), u_2(x,t)$ в области $D_{n+1}(x \in R^n, t > 0),$ удовлетворяющие уравнениям:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + f_1(x,t), (x,t) \in D_{n+1}^- = \left\{(x,t), x' \in R^{n-1}, x_n < 0, t > 0\right\}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + f_2(x,t), (x,t) \in D_{n+1}^+ = \left\{(x,t), x' \in R^{n-1}, x_n > 0, t > 0\right\} \tag{7}$$

начальным условиям:

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \tag{8}$$

и условиям сопряжения:

$$u_1\Big|_{x_n=-0} = u_2\Big|_{x_n=+0}, \tag{9}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\Big|_{x_n=-0} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\Big|_{x_n=+0}, \tag{10}$$

где $k_i > 0,\ i = 1,2;$

Применяя к задаче (6)-(10) преобразование Фурье по переменным $x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ и преобразование Лапласа по переменной t, получим

$$\frac{d^2\tilde{\bar{u}}_1}{dx_n^2} - \left(p + |s'|^2\right)\tilde{\bar{u}}_1 = -\tilde{\bar{f}}_1(s', x_n, p) - \tilde{\varphi}_1(s', x_n), \quad x_n < 0,, \tag{11}$$

$$\frac{d^2\tilde{\bar{u}}_2}{dx_n^2} - \left(p + |s'|^2\right)\tilde{\bar{u}}_2 = -\tilde{\bar{f}}_2(s', x_n, p) - \tilde{\varphi}_2(s', x_n), \quad x_n > 0, \tag{12}$$

где $s' = (s_1, s_2, ..., s_{n-1})$.

Условия сопряжения (9)-(10) примут следующий вид:

$$\tilde{\bar{u}}_1\Big|_{x_n=-0} = \tilde{\bar{u}}_2\Big|_{x_n=+0}, \tag{13}$$

$$k_1 \frac{d\tilde{\bar{u}}_1}{dx_n}\Big|_{x_n=-0} = k_2 \frac{d\tilde{\bar{u}}_2}{dx_n}\Big|_{x_n=+0}, \tag{14}$$

Нетрудно заметить, что решение уравнения (11)-(12) имеют следующий вид:

$$\tilde{\bar{u}}_1(s', x_n, p) = \left(c_1 - \frac{1}{2\sqrt{p + |s'|^2}} \int_0^{x_n} \tilde{\bar{F}}_1(s', \xi_n p) e^{-\sqrt{p+|s'|^2}\xi_n} d\xi_n\right) e^{\sqrt{p+|s'|^2}x_n} +$$

$$+\left(c_2 + \frac{1}{2\sqrt{p + |s'|^2}} \int_0^{x_n} \tilde{\bar{F}}_1(s', \xi_n, p) e^{\sqrt{p+|s'|^2}\xi_n} d\xi_n\right) e^{-\sqrt{p+|s'|^2}x_n}, \quad x_n < 0, \tag{15}$$

$$\tilde{\bar{u}}_2(s', x_n, p) = \left(d_1 - \frac{1}{2\sqrt{p + |s'|^2}} \int_0^{x_n} \tilde{\bar{F}}_2(s', \xi_n p) e^{-\sqrt{p+|s'|^2}\xi_n} d\xi_n\right) e^{\sqrt{p+|s'|^2}x_n} +$$

$$+\left(d_2 + \frac{1}{2\sqrt{p + |s'|^2}} \int_0^{x_n} \tilde{\bar{F}}_2(s', \xi_n, p) e^{\sqrt{p+|s'|^2}\xi_n} d\xi_n\right) e^{-\sqrt{p+|s'|^2}x_n}, \quad x_n > 0, \tag{16}$$

где $\tilde{\bar{F}}_i(s', x_n, p) = \tilde{\bar{f}}_i(s', x_n, p) + \tilde{\varphi}_i(s', x_n), \quad i = 1,2.$

Предполагая $\lim\limits_{x_n \to -\infty} \tilde{\bar{u}}_1(s', x_n, p) = 0$, $\lim\limits_{x_n \to +\infty} \tilde{\bar{u}}_2(s', x_n, p) = 0$, найдем

$$c_2 = \frac{1}{2\sqrt{p + |s'|^2}} \int_{-\infty}^{0} \tilde{\bar{F}}_1(s', \xi_n, p) e^{\sqrt{p+|s'|^2}\xi_n} d\xi_n,$$

$$d_1 = \frac{1}{2\sqrt{p+|s'|^2}} \int_0^{\infty} \tilde{\tilde{F}}_2(s', \xi_n, p) e^{-\sqrt{p+|s'|^2}\xi_n} d\xi_n,$$

Неизвестные c_1, d_2 найдем из условий сопряжения (13)-(14). Подставляя найденные $c_i, d_i, \quad (i=1,2)$ в (15)-(16) получим решение задачи (11)-(14).

$$\tilde{\tilde{u}}_1(s', x_n, p) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\tilde{\tilde{F}}_1(s', \xi_n, p)}{2\sqrt{p+|s'|^2}} \left(e^{-\sqrt{p+|s'|^2}|x_n-\xi_n|} + \lambda e^{\sqrt{p+|s'|^2}(x_n+\xi_n)} \right) d\xi_n +$$

$$+\mu_2 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\tilde{F}}_2(s', \xi_n, p)}{2\sqrt{p+|s'|^2}} e^{-\sqrt{p+|s'|^2}(\xi_n - x_n)} d\xi_n, \quad x_n < 0, \tag{17}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_2(s', x_n, p) = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\tilde{F}}_2(s', \xi_n, p)}{2\sqrt{p+|s'|^2}} \left(e^{-\sqrt{p+|s'|^2}|x_n-\xi_n|} - \lambda e^{-\sqrt{p+|s'|^2}(x_n+\xi_n)} \right) d\xi_n +$$

$$+\mu_1 \int_{-\infty}^{0} \frac{\tilde{\tilde{F}}_1(s', \xi_n, p)}{2\sqrt{p+|s'|^2}} e^{-\sqrt{p+|s'|^2}(x_n - \xi_n)} d\xi_n, \quad x_n > 0, \tag{18}$$

где $\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad \mu_i = \frac{2k_i}{k_1 + k_2}, \quad (i=1,2)$.

Применяя обратные преобразование Фурье и Лапласа к формулам (17)-(18), используя формулу свертки и формулы [11]:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-|x_n \pm \xi_n|\sqrt{p+|s'|^2}}}{2\sqrt{p+|s'|^2}} \right] = \frac{e^{-\frac{(x_n \pm \xi_n)^2}{4t} - |s'|^2 t}}{2\sqrt{\pi t}},$$

$$F^{-1}\left[e^{-|s'|^2 t} \right] = \frac{e^{-\frac{|x'|^2}{4t}}}{\left(\sqrt{2t}\right)^{n-1}}, \tag{19}$$

(через $L^{-1}[\cdot], \quad F^{-1}[\cdot]$ обозначены соответственно обратные преобразование Лапласа и Фурье) имеем

$$u_1(x,t) = \int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \left[G(x'-\xi', x_n - \xi_n, t) + \lambda G(x'-\xi', x_n + \xi_n, t) \right] \varphi_1(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n +$$

$$+\mu_2 \int_{R^{n-1}} \int_0^{\infty} G(x'-\xi', x_n - \xi_n, t) \varphi_2(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n + \tag{20}$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \left[G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t-\tau) + \lambda G(x'-\xi', x_n+\xi_n, t-\tau)\right] f_1(\xi', \xi_n, \tau) d\xi' d\xi_n +$$

$$+\mu_2 \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \int_0^{\infty} G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t-\tau) f_2(\xi', \xi_n, \tau) d\xi' d\xi_n, \quad \text{в области } D_n^-,$$

$$u_2(x,t) = \int_{R^{n-1}} \int_0^{\infty} \left[G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t) - \lambda G(x'-\xi', x_n+\xi_n, t)\right] \varphi_2(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n +$$

$$+\mu_1 \int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t) \varphi_1(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n + \tag{21}$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \int_0^{\infty} \left[G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t-\tau) - \lambda G(x'-\xi', x_n+\xi_n, t-\tau)\right] f_2(\xi', \xi_n, \tau) d\xi' d\xi_n +$$

$$+\mu_1 \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t-\tau) f_1(\xi', \xi_n, \tau) d\xi' d\xi_n, \quad \text{в области } D_n^+,$$

где $d\xi' = d\xi_1 d\xi_2 \cdot \ldots \cdot d\xi_{n-1}$, $\quad G(x'-\xi', x_n \pm \xi_n, t) = \dfrac{e^{-\frac{|x'-\xi'|^2 + (x_n \pm \xi_n)^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}$,

$|x'-\xi'| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + \ldots + (x_{n-1}-\xi_{n-1})^2}$,

Таким образом, мы получили решение вспомогательной задачи (6)-(10) в виде (20)-(21).

Известно [12], что для функции $\Gamma(x,t) = \dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n}$ справедлива оценка:

$$\left|D_x^k D_t^m \Gamma(x,t)\right| \le \frac{Ce^{-\delta\frac{|x|^2}{t}}}{t^{\frac{n+k}{2}+m}}, \text{ где } \delta < \frac{1}{4}.$$

Аналогичную оценку можно показать и для функции $G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t)$:

$$\left|D_x^k D_t^m G(x'-\xi', x_n-\xi_n, t)\right| \le \frac{Ce^{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{t}}}{t^{\frac{n+k}{2}+m}}, \tag{22}$$

где $|x-\xi| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + \ldots + (x_n-\xi_n)^2}$.

Теперь рассмотрим вспомогательную задачу B: требуется найти функцию $u(x,t)$ в области $D_{n+1}(x\in R^n, t>0),$ удовлетворяющее уравнению:

$$t^p\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f(x,t),(x,t)\in D_{n+1}=\{(x,t),x\in R^n,t>0\},\tag{23}$$

и начальному условию:

$$u(x,0)=\varphi(x),\tag{24}$$

Применяя к уравнению (23) преобразование Фурье по переменным $x=(x_1,x_2,...,x_n),$ получим

$$t^p\frac{d\tilde{u}}{dt}+|s|^2\tilde{u}=\tilde{f}(s,t),\tag{25}$$

где $s=(s_1,s_2,...,s_n),\ |s|=\sqrt{s_1{}^2+s_2{}^2+...+s_n{}^2}$.

Начальное условие (24) примет вид:

$$\tilde{u}(s,0)=\tilde{\varphi}(s),\tag{26}$$

Решение уравнения (25) с учетом начального условия (26) имеет вид:

$$\tilde{u}(s,t)=\tilde{\varphi}(s)e^{-\frac{t^q}{q}|s|^2}+\int_0^t\frac{\tilde{f}(s,\tau)}{\tau^p}e^{-\frac{(t^q-\tau^q)}{q}|s|^2}d\tau\tag{27}$$

где $q=1-p$.

Применяя обратное преобразование Фурье к равенству (27), используя формулу свертки и формулу (19), получим решение задачи (23)-(24):

$$u(x,t)=\int_{R^n}\frac{q^{\frac{n}{2}}}{\left(2\sqrt{\pi t^q}\right)^n}e^{-\frac{q|x-\xi|^2}{4t^q}}\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^p}\int_{R^n}\frac{q^{\frac{n}{2}}}{\left(2\sqrt{\pi(t^q-\tau^q)}\right)^n}e^{-\frac{q|x-\xi|^2}{4(t^q-\tau^q)}}f(\xi,\tau)d\xi\,.\tag{28}$$

Если введем обозначение $\Gamma_q(x,t)=\dfrac{q^{\frac{n}{2}}}{\left(2\sqrt{\pi t^q}\right)^n}e^{-\frac{q|x|^2}{4t^q}}$, то формулу (28) можно написать в виде:

$$u(x,t)=\int_{R^n}\Gamma_q(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^p}\int_{R^n}\Gamma_q(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,.\tag{29}$$

Функция $\Gamma_q(x,t)$ в одномерном случае построена в работе [13]. Нетрудно заметить, что как в работе [12], можно получить оценку

$$\left|D_x^kD_t^m\Gamma_q(x,t)\right|\le\frac{Ce^{-\delta\frac{|x|^2}{t^q}}}{t^{\frac{q(n+k)}{2}+m}},\ \text{где}\ \delta<\frac{1}{4}.\tag{30}$$

Результаты исследования.

Теперь приступим к решению основной задачи (1)-(5). Используя решения вспомогательных задач А и В, решения которых имеют вид (20)-(21) и (29), можно получить решение задачи

(1)-(5) в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = &\int_{R^{n-1}}\int_{-\infty}^{0}\left[G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t)+\lambda G_q(x'-\xi',x_n+\xi_n,t)\right]\varphi_1(\xi',\xi_n)d\xi' d\xi_n + \\ &+\mu_2\int_{R^{n-1}}\int_{0}^{\infty}G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t)\varphi_2(\xi',\xi_n)d\xi' d\xi_n + \\ &+\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^p}\int_{R^{n-1}}\int_{-\infty}^{0}\left[G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t-\tau)+\lambda G_q(x'-\xi',x_n+\xi_n,t-\tau)\right]f_1(\xi',\xi_n,\tau)d\xi' d\xi_n + \\ &+\mu_2\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^p}\int_{R^{n-1}}\int_{0}^{\infty}G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t-\tau)\,f_2(\xi',\xi_n,\tau)d\xi' d\xi_n, \quad \text{в области } D_n^-, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = &\int_{R^{n-1}}\int_{0}^{\infty}\left[G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t)-\lambda G_q(x'-\xi',x_n+\xi_n,t)\right]\varphi_2(\xi',\xi_n)d\xi' d\xi_n + \\ &+\mu_1\int_{R^{n-1}}\int_{-\infty}^{0}G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t)\varphi_1(\xi',\xi_n)d\xi' d\xi_n + \\ &+\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^p}\int_{R^{n-1}}\int_{0}^{\infty}\left[G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t-\tau)-\lambda G_q(x'-\xi',x_n+\xi_n,t-\tau)\right]f_2(\xi',\xi_n,\tau)d\xi' d\xi_n + \\ &+\mu_1\int_0^t\frac{d\tau}{\tau^p}\int_{R^{n-1}}\int_{-\infty}^{0}G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t-\tau)\,f_1(\xi',\xi_n,\tau)d\xi' d\xi_n, \quad \text{в области } D_n^+, \end{aligned} \tag{32}$$

где $\quad G_q(x'-\xi',x_n\pm\xi_n,t)=\dfrac{q^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{q\left(|x'-\xi'|^2+(x_n\pm\xi_n)^2\right)}{4t^q}}}{\left(2\sqrt{\pi t^q}\right)^n},$

Таким образом, мы полностью решили задачу (1)-(5). Нетрудно проверить, что полученные решения (31)-(32) удовлетворяют уравнениям (1)-(2), начальным условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5). Аналогичную оценку можно получить для функции $G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t)$.

$$\left|D_x^k D_t^m G_q(x'-\xi',x_n-\xi_n,t)\right| \le \frac{Ce^{-\delta\frac{|x-\xi|^2}{t^q}}}{t^{\frac{q(n+k)}{2}+m}} \tag{33}$$

Решение задачи (1)-(5), и оценки (30) и (33), в дальнейшем можно использовать при исследовании дифференциальных свойств и получение априорных оценок начально-краевых задач для вырождающегося по времени уравнения теплопроводности в соболевских и гельдеровских классах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А.А. Параболические уравнения с разрывными коэффициентами.//ДАН СССР, 1958, т.121, №2, с.225-228.
2 Ким Е.И., Баймуханов Б.Б. О распределении температуры в кусочно-однородной полубесконечной пластинке.// ДАН СССР,1961,т. 140, №2, с.333-336.
3 Камынин Л.И. О решении краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.// ДАН СССР, 1961, т.139, №5, с.1048-1051.
4 Камынин Л.И. О решении IV и V краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка в криволинейной области // Журн.вычисл.математики и мат.физики.-1969.-Т.9.-№3.-с.558-572.
5 Камынин Л.И. О методе потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.//ДАН СССР, 1962, т.145,№6, с.1213-1216.
6 Койлышов У.К., Абдрахманов М.А. О дифференциальных свойствах решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами в соболевских $W_2^{2,1}-$ классах.// Вестник КазГУ, серия мат.,мех.,инф. 1998,№14, с.102-108.
7 Ким Е.И., Койлышов У.К. Решение задачи теории теплопроводности с разрывным коэффициентом и вырождающимися подвижными границами // Изв.АН КазССР. Сер.физ.-мат.-1984.-№3.-с.35-39.
8 Koilyshov U.,Beisenbaeva K. A conjugation problem for the heat equation in the field where the boundary moves in linear order.// Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, -2019,-№3(95),- P.26-32.
9 Ильин А.М. Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения. //Мат.сб.,1960, т.50(92), №4, с.443-498.
10 Смирнова Г.Н. Линейные параболические уравнения, вырождающиеся на границе области.//СМЖ.,1963,т.4,№2.с.343-358.
11 Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.-М.: Наука,1974.-544с.
12 Ладыженская О.А.,Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. –М.: Наука, 1967, 736 с.
13 Койлышов У.К., Бейсенбаева К.А. Решение одной краевой задачи для вырождающегося уравнения теплопроводности в области с подвижной границей.// Вестник КазНИТУ, 2020, №3, с.623-626.

REFERENCES

1 Samarskiy A.A. Parabolicheskiye uravneniya s razryvnymi koeffitsiyentami.//DAN SSSR, 1958, t.121, №2, s.225-228.
2 Kim Ye.I., Baymukhanov B.B. O raspredelenii temperatury v kusochno-odnorodnoy polubeskonechnoy plastinke.// DAN SSSR,1961,t. 140, №2, s.333-336.
3 Kamynin L.I. O reshenii krayevykh zadach dlya parabolicheskogo uravneniya s

razryvnymi koeffitsiyentami.// DAN SSSR, 1961, t.139, №5, s.1048-1051.

4 Kamynin L.I. O reshenii IV i V kraevykh zadach dlya odnomernogo parabolicheckogo uravneniya vtorogo poryadka v krivolineynoy oblacti // Zhurn.vychicl.matematiki i mat.fiziki.-1969.-T.9.-№3.-s.558-572.

5 Kamynin L.I. O metode potentsialov dlya parabolicheskogo uravneniya s razryvnymi koeffitsiyentami.//DAN SSSR, 1962, t.145,№6, s.1213-1216.

6 Koylyshov U.K., Abdrakhmanov M.A. O differentsial'nykh svoystvakh resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya teploprovodnosti s razryvnymi koeffitsiyentami v sobolevskikh klassakh.// Vestnik KazGU, seriya mat.,mekh.,inf. 1998,№14, s.102-108.

7 Kim E.I., Koylyshov U.K. Reshenie zadachi teorii teploprovodnocti c razryvnym koeffitsientom i vyrozhdayushchimicya podvizhnymi granitsami // Izv.AN KazCCR. Cer.fiz.-mat.-1984.-№3.-s.35-39.

8 Koilyshov U.,Beisenbaeva K. A conjugation problem for the heat equation in the field where the boundary moves in linear order.// Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, -2019,-№3(95),- P.26-32.

9 Il'in A.M. Vyrozhdayushchiyesya ellipticheskiye i parabolicheskiye uravneniya. //Mat.sb.,1960, t.50(92), №4, s.443-498.

10 Smirnova G.N. Lineynyye parabolicheskiye uravneniya, vyrozhdayushchiyesya na granitse oblasti.//SMZH.,1963,t.4,№2.s.343-358.

11 Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral'nyye preobrazovaniya i operatsionnoye ischisleniye.-M.: Nauka,1974.-544s.

12 Ladyzhenskaya O.A.,Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa. –M.: Nauka, 1967, 736 s.

13 Koylyshov U.K., Beysenbayeva K.A. Resheniye odnoy krayevoy zadachi dlya vyrozhdayushchegosya uravneniya teploprovodnosti v oblasti s podvizhnoy granitsey.// Vestnik KazNITU, 2020, №3, s.623-626.