УДК 517.956
МРНТИ 27.31.15

И.Р.ГАППАРОВ[1] , И.ОРАЗОВ[2] , Б.Х.ТУРМЕТОВ[3]
[1]магистрант, E-mail: gapparov-1998@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, профессор, E-mail: i_orazov@mail.ru
[3]доктор физико-математических наук, профессор, E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
Международный казахско-турецкий университет им. Ходжа Ахмеда Ясави

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

В данной работе исследуется обобщение задачи Дирихле для нелокального уравнения Пуассона в прямоугольной области. В нижней и верхной части границы задаются нормальные производные k-го порядка, а на боковых сторонах заданы однородные краевые условия. При заданных условиях доказывается существование единственного классического решения этой задачи.

***Ключевые слова**:* нелокальное уравнение, производная высокого порядка, инволюция, задача Дирихле, существования, единственность решения.

И.Р.ГАППАРОВ[1] , И.ОРАЗОВ[2] , Б.Х.ТУРМЕТОВ[3]
[1]магистрант, E-mail: gapparov-1998@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, профессор, E-mail: i_orazov@mail.ru
[3]доктор физико-математических наук, профессор,
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
Международный казахско-турецкий университет им. Ходжа Ахмеда Ясави

БЕЙЛОКАЛ ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ ЖАЛПЫЛАМАСЫ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста біз бейлокал Пуассон теңдеуі үшін тікбұрышты аймақта Дирихле есебінің жалпылауын зерттейміз. Шекараның төменгі және жоғарғы бөліктерінде k-ші ретті нормал бағыттағы туындылар, ал бүйір жақтарында біртекті шекаралық шарттар беріледі. Берілген шарттарда бұл мәселенің жалғыз классикалық шешімі бар екендігі дәлелденеді.

Кілттік сөздер: бейлокал теңдеу, жоғары ретті туынды, инволюция, Дирихле мәселесі, бар болу, шешімнің жалғыз болуы.

I.R.GAPPAROV[1],I.ORAZOV[2] , B.KH.TURMETOV[3]
[1] master student, E-mail: gapparov-1998@mail.ru
[2]candidate of physical and mathematical sciences, professor, E-mail: i_orazov@mail.ru
[3]doctor of physical and mathematical sciences, professor,E-mail:batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University

ASYMPTOTIC SOLUTION OF A NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

In this paper, we study a generalization of the Dirichlet problem for the nonlocal Poisson equation in a rectangular domain. In the lower and upper parts of the boundary, the normal derivatives of the k-th order are specified, and homogeneous boundary conditions are specified on the lateral sides. Under the given conditions, the existence of a unique classical solution to this problem is proved.

Key words: nonlocal equation, higher order derivative, involution, Dirichlet problem, existence, uniqueness of solution.

Введение

В данной работе для нелокального аналога уравнения Пуассона мы исследуем вопросы разрешимости краевой задачи с граничными операторами высокого порядка. Отметим, что рассматриваемые нами нелокальное уравнение является простейшим уравнением в частных производных, содержащее инволютивные отображения. Дифференциальные уравнения с инволюцией рассматривались в работах многих авторов (см.например [1-8]).

Переходим к постановке задачи настоящей работы. Пусть $\Omega=\{(x,y):0<x<p,0<y<q\}$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, a_0,a_1,a_2,a_3 - некоторые действительные числа. Введем оператор

$$Lu(x,y)\equiv a_0\Delta u(x,y)+a_1\Delta u(p-x,y)+a_2\Delta u(x,q-y)+a_3\Delta u(p-x,q-y)$$

и рассмотрим следующее уравнение

$$Lu(x,y)=f(x,y). \qquad (1)$$

2. Исследование основной задачи.

Изучим значения функции $Lu(x,y)$ в точках $(p-x,y);(x,q-y);(p-x,q-y)$. Очевидно, что каждый из следующих отображений

$$I_1(x,y)\to(p-x,y);I_2(x,y)\to(x,q-y);I_2(x,y)\to(p-x,q-y)$$

являются инволюцией, т.е. обладают свойством $I_j^2 = E \Leftrightarrow I_j^2(x,y) = (x,y)$. Кроме того, имеют места равенства

$$I_1 I_2 = I_2 I_1 = I_3; I_1 I_3 = I_3 I_1 = I_2; I_2 I_3 = I_3 I_2 = I_1.$$

Тогда для функции $Lu(x,y)$ имеем

$$Lu(p-x,y) = a_1\Delta u(x,y) + a_0\Delta u(p-x,y) + a_3\Delta u(x,q-y) + a_2\Delta u(p-x,q-y),$$

$$Lu(x,q-y) = a_2\Delta u(x,y) + a_3\Delta u(p-x,y) + a_0\Delta u(x,q-y) + a_1\Delta u(p-x,q-y),$$

$$L(p-x,q-y) = a_3\Delta u(x,y) + a_2\Delta u(p-x,y) + a_1\Delta u(x,q-y) + a_0\Delta u(p-x,q-y).$$

Из этих равенств, а также из уравнения (1) получаем следующую систему

$$AU = F, \tag{4}$$

где обозначено.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ u(p-x,y) \\ u(x,q-y) \\ u(p-x,q-y) \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ f(p-x,y) \\ f(x,q-y) \\ f(p-x,q-y) \end{pmatrix}.$$

Так как A симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица O такая, что A представима в виде $A = ODO^{-1}$, где матрицы D и O имеют вид

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, O^{-1} = \frac{1}{4}O.$$

Здесь $\varepsilon_j, j = 1,2,3,4$ собственные значения матрицы A, причем они определяются равенствами

$$\varepsilon_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3; \varepsilon_2 = a_0 + a_1 - a_2 - a_3; \varepsilon_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3; \varepsilon_4 = a_0 - a_1 - a_2 + a_3.$$

Пусть $O_j = \left(\nu_{1,j}, \nu_{2,j}, \nu_{3,j}, \nu_{4,j}\right)^T$, $j = 1,2,3,4$ вектор-столбцы матрицы O. Умножим равенство (4) скалярно к вектору O_j. Тогда

$$(O_j, AU) = (O_j, F) \Rightarrow (A^T O_j, U) = (O_j, F) \Leftrightarrow (AO_j, U) = (O_j, F).$$

Далее, так как $AO_j = \varepsilon_j O_j$, то отсюда получаем

$$(AO_j, U) = (O_j, F) \Leftrightarrow \varepsilon_j (O_j, U) = (O_j, F).$$

Обозначим,

$$w_j(x,y) = (O_j, U) \equiv \nu_{1,j} u(x,y) + \nu_{2,j} u(p-x,y) + \nu_{3,j} u(x,q-y) + \nu_{4,j} u(p-x,q-y), \quad (5)$$

$$f_j(x,y) = (O_j, F) \equiv \nu_{1,j} f(x,y) + \nu_{2,j} f(p-x,y) + \nu_{3,j} f(x,q-y) + \nu_{4,j} f(p-x,q-y).$$

Тогда, если $\varepsilon_j \neq 0, j = 1,2,3,4$, то из уравнении (5) получаем

$$\Delta w_j(x,y) = \frac{1}{\varepsilon_j} f_j(x,y), \; j = 1,2,3,4.$$

Кроме того, из граничных условий (2) следуют

$$w_j(0,y) = \nu_{1,j} u(0,y) + \nu_{2,j} u(p,y) + \nu_{3,j} u(0,q-y) + \nu_{4,j} u(p,q-y) = 0, 0 \le y \le q,$$

$$w_j(p,y) = \nu_{1,j} u(p-x,y) + \nu_{2,j} u(0,y) + \nu_{3,j} u(p,q-y) + \nu_{4,j} u(0,q-y) = 0, 0 \le y \le q.$$

Далее,

$$\frac{\partial w_j(x,y)}{\partial y} = \nu_{1,j} u_y(x,y) + \nu_{2,j} u_y(p-x,y) - \nu_{3,j} u_y(x,q-y) - \nu_{4,j} u_y(p-x,q-y),$$

$$\frac{\partial^2 w_j(x,y)}{\partial y^2} = \nu_{1,j} u_{yy}(x,y) + \nu_{2,j} u_{yy}(p-x,y) + \nu_{3,j} u_{yy}(x,q-y) + \nu_{4,j} u_{yy}(p-x,q-y),$$

и в общем случае верно равенство

$$\frac{\partial^k w_j(x,y)}{\partial y^k} = \nu_{1,j} \frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k} + \nu_{2,j} \frac{\partial^k u(p-x,y)}{\partial y^k} + (-1)^k \nu_{3,j} \frac{\partial^k u(x,q-y)}{\partial y^k} + (-1)^k \nu_{4,j} \frac{\partial^k u(p-x,q-y)}{\partial y^k}.$$

Тогда используя условия (3) получаем

$$\frac{\partial^k w_j(x,0)}{\partial y^k} = \nu_{1,j}\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial y^k} + \nu_{2,j}\frac{\partial^k u(p-x,0)}{\partial y^k} + (-1)^k \nu_{3,j}\frac{\partial^k u(x,q)}{\partial y^k} + (-1)^k \nu_{4,j}\frac{\partial^k u(p-x,q)}{\partial y^k} =$$

$$= \nu_{1,j}\varphi_k(x) + \nu_{2,j}\varphi_k(p-x) + (-1)^k \nu_{3,j}\psi_k(x) + (-1)^k \nu_{4,j}\psi_k(p-x) \equiv r_k(x), 0 \le x \le p,$$

$$\frac{\partial^k w_j(x,q)}{\partial y^k} = \nu_{1,j}\frac{\partial^k u(x,q)}{\partial y^k} + \nu_{2,j}\frac{\partial^k u(p-x,q)}{\partial y^k} + (-1)^k \nu_{3,j}\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial y^k} + (-1)^k \nu_{4,j}\frac{\partial^k u(p-x,0)}{\partial y^k} =$$

$$= \nu_{1,j}\psi_k(x) + \nu_{2,j}\psi_k(p-x) + (-1)^k \nu_{3,j}\varphi_k(x) + (-1)^k \nu_{4,j}\varphi_k(p-x) \equiv s_k(x), 0 \le x \le p.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть ε_j собственные значения матрицы A и выполняются условия $\varepsilon_j \ne 0,\ j = 1,2,3,4.$ Тогда, если $u(x,y)$ является решением задачи D-N, то функции $w_j(x,y)$ из равенства (4) являются решениями следующих задач:

$$\Delta w_j(x,y) = \frac{1}{\varepsilon_j} f_j(x,y),\ j = 1,2,3,4,(x,y) \in \Omega, \tag{6}$$

$$w_j(0,y) = 0, w_j(p,y) = 0,\ 0 \le y \le q, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^k w_j(x,0)}{\partial y^k} = r_k(x), \frac{\partial^k w_j(x,q)}{\partial y^k} = s_k(x), 0 \le x \le p, \tag{8}$$

где $f_j(x,y)$ определяются из (5), а функции $r_k(x)$ и $s_k(x)$ представляются в виде

$$r_k(x) = \nu_{1,j}\varphi_k(x) + \nu_{2,j}\varphi_k(p-x) + (-1)^k \nu_{3,j}\psi_k(x) + (-1)^k \nu_{4,j}\psi_k(p-x), \tag{9}$$

$$s_k(x) = \nu_{1,j}\psi_k(x) + \nu_{2,j}\psi_k(p-x) + (-1)^k \nu_{3,j}\varphi_k(x) + (-1)^k \nu_{4,j}\varphi_k(p-x). \tag{10}$$

Переходим к построению решения задачи D-N. Предположим, что $u(x,y)$ является решением задачи D-N. Обозначим

$$w(x,y) = a_0 u(x,y) + a_1 u(p-x,y) + a_2 u(x,q-y) + a_3 u(p-x,q-y). \tag{11}$$

Если применим к равенству (11) оператор Δ, то в силу равенства (1) имеем $\Delta w(x,y)=f(x,y)$. Кроме того, из условий (2) следует

$$w(0,y)=a_0u(0,y)+a_1u(p,y)+a_2u(0,q-y)+a_3u(p,q-y)=0,$$

$$w(p,y)=a_0u(p,y)+a_1u(0,y)+a_2u(p,q-y)+a_3u(0,q-y)=0.$$

Далее,

$$\frac{\partial^k w(x,y)}{\partial y^k}=a_0\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}+a_1\frac{\partial^k u(p-x,y)}{\partial y^k}+(-1)^k a_2\frac{\partial^k u(x,q-y)}{\partial y^k}+(-1)^k a_3\frac{\partial^k u(p-x,q-y)}{\partial y^k}.$$

Тогда используя условия (3) получаем

$$\frac{\partial^k w(x,0)}{\partial y^k}=a_0\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial y^k}+a_1\frac{\partial^k u(p-x,0)}{\partial y^k}+(-1)^k a_2\frac{\partial^k u(x,q)}{\partial y^k}+(-1)^k a_3\frac{\partial^k u(p-x,q)}{\partial y^k}=$$

$$=a_0\varphi_k(x)+a_1\varphi_k(p-x)+(-1)^k a_2\psi_k(x)+(-1)^k a_3\psi_k(p-x)\equiv r(x),0\le x\le p,$$

$$\frac{\partial^k w(x,q)}{\partial y^k}=a_0\frac{\partial^k u(x,q)}{\partial y^k}+a_1\frac{\partial^k u(p-x,q)}{\partial y^k}+(-1)^k a_2\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial y^k}+(-1)^k a_3\frac{\partial^k u(p-x,0)}{\partial y^k}=$$

$$=a_0\psi_k(x)+a_1\psi_k(p-x)+(-1)^k a_2\varphi_k(x)+(-1)^k a_3\varphi_k(p-x)\equiv s(x),0\le x\le p.$$

Таким образом, для функции $w(x,y)$ из (11) получаем задачу

$$\Delta w(x,y)=f(x,y). \tag{12}$$

$$w(0,y)=w(p,y)=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^k w(x,0)}{\partial y^k}=r(x),\frac{\partial^k w(x,q)}{\partial y^k}=s(x),0\le x\le p, \tag{14}$$

где функции $r(x)$ и $s(x)$ определяются из равенств

$$r(x)=a_0\varphi_k(x)+a_1\varphi_k(p-x)+(-1)^k a_2\psi_k(x)+(-1)^k a_3\psi_k(p-x),0\le x\le p, \tag{15}$$

$$s(x)=a_0\psi_k(x)+a_1\psi_k(p-x)+(-1)^k a_2\varphi_k(x)+(-1)^k a_3\varphi_k(p-x),0\le x\le p. \tag{16}$$

При этом решение задачи (12) – (14) ищем из класса $w(x,y)\in C^{2,2}_{x,y}\left(\overline{\Omega}\right),\ \dfrac{\partial^k w(x,y)}{\partial y^k}\in C\left(\overline{\Omega}\right)$.

В равенстве (11) последовательно меняем точку (x,y) на $(p-x,y);(x,q-y);(p-x,q-y)$ и получаем систему

$$AU=W, \tag{17}$$

где обозначено

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0\end{pmatrix};U=\begin{pmatrix} u(x,y)\\ u(p-x,y)\\ u(x,q-y)\\ u(p-x,q-y)\end{pmatrix};W=\begin{pmatrix} w(x,y)\\ w(p-x,y)\\ w(x,q-y)\\ w(p-x,q-y)\end{pmatrix}.$$

Теперь из системы уравнений (17) находим функцию $u(x,y)$. Для этого построим обратную к A матрицу. Пусть матрица B построена на числах b_0,b_1,b_2,b_3 и имеет структуру матрицы A, т.е.

$$B=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3\\ b_1 & b_0 & b_3 & b_2\\ b_2 & b_3 & b_0 & b_1\\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0\end{pmatrix}.$$

Если μ_1,μ_2,μ_3,μ_4 собственные числа матрицы B, то B представима в виде $B=OD_1O^{-1}$, где матрицы D_1 и O имеют вид

$$D_1=\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mu_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu_4\end{pmatrix};O=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},O^{-1}=\frac{1}{4}O.$$

Покажем, что если $\mu_j=\dfrac{1}{\varepsilon_j},\varepsilon_j\neq 0,\ j=1,2,3,4$, то построенная нами матрица B является обратным к A.

Действительно, так как $A = ODO^{-1}$, то

$$AB = ODO^{-1} \cdot OD_1O^{-1} = OD \cdot D_1O^{-1} = OEO^{-1} = E.$$

Таким образом, матрица A^{-1} имеет вид

$$A^{-1} = OD_1O^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Из равенства (17) находим

$$U = A^{-1}W.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = b_0w(x,y) + b_1w(p-x,y) + b_2w(x,q-y) + b_3w(p-x,q-y), \tag{19}$$

где коэффициенты $b_j, j = 1,2,3,4$ определяются из (18).

Теорема 2. Если $\varepsilon_j \neq 0, j = 1,2,3,4$ и $w(x,y)$ является решением задачи (12) – (14), то функция $u(x,y)$ определямая по формуле (19) является решением задачи D-N.

Доказательство. Применим к функции $u(x,y)$ из (19) оператор Лапласа

$$\Delta u(x,y) = b_0\Delta w(x,y) + b_1\Delta w(p-x,y) + b_2\Delta w(x,q-y) + b_3\Delta w(p-x,q-y) =$$

$$= b_0 f(x,y) + b_1 f(p-x,y) + b_2 f(x,q-y) + b_3 f(p-x,q-y).$$

Следовательно,

$$\Delta u(x,y) = b_0 f(x,y) + b_1 f(p-x,y) + b_2 f(x,q-y) + b_3 f(p-x,q-y).$$

Отсюда

$$\Delta u(p-x,y) = b_1 f(x,y) + b_0 f(p-x,y) + b_3 f(x,q-y) + b_2 f(p-x,q-y).$$

$$\Delta u(x,q-y)=b_2 f(x,y)+b_3 f(p-x,y)+b_0 f(x,q-y)+b_1 f(p-x,q-y).$$

$$\Delta u(p-x,q-y)=b_3 f(x,y)+b_2 f(p-x,y)+b_1 f(x,q-y)+b_0 f(p-x,q-y).$$

Тогда

$$Lu(x,y)=a_0\Delta u(x,y)+a_1\Delta u(p-x,y)+a_2\Delta u(x,q-y)+a_3\Delta u(p-x,q-y)=$$

$$=a_0b_0 f(x,y)+a_0b_1 f(p-x,y)+a_0b_2 f(x,q-y)+a_0b_3 f(p-x,q-y)+$$

$$+a_1b_1 f(x,y)+a_1b_0 f(p-x,y)+a_1b_3 f(x,q-y)+a_1b_2 f(p-x,q-y)+$$

$$+a_2b_2 f(x,y)+a_2b_3 f(p-x,y)+a_2b_0 f(x,q-y)+a_2b_1 f(p-x,q-y)+$$

$$+a_3b_3 f(x,y)+a_3b_2 f(p-x,y)+a_3b_1 f(x,q-y)+a_3b_0 f(p-x,q-y)=$$

$$=\left(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)f(x,y)+\left(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3+a_3b_2\right)f(p-x,y)+$$

$$+\left(a_0b_2+a_1b_3+a_2b_0+a_3b_1\right)f(x,q-y)+\left(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0\right)f(p-x,q-y).$$

Далее, так как $a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=1$, а остальные коэффициенты равняются нулю, то $Lu(x,y)=f(x,y)$, т.е. функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1). Проверим выполнения граничных условий (2). В силу условий (13) имеем

$$u(0,y)=b_0w(0,y)+b_1w(p,y)+b_2w(0,q-y)+b_3w(p,q-y)=0, 0\le y\le q,$$

$$u(p,y)=b_0w(p,y)+b_1w(0,y)+b_2w(p,q-y)+b_3w(0,q-y)=0, 0\le y\le q.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}=b_0\frac{\partial^k}{\partial y^k}w(x,y)+b_1\frac{\partial^k w(p-x,y)}{\partial y^k}+(-1)^k b_2\frac{\partial^k w(x,q-y)}{\partial y^k}+(-1)^k b_3\frac{\partial^k w(p-x,q-y)}{\partial y^k}.$$

Тогда из условий (14) следует

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial y^k} = b_0 \frac{\partial^k w(x,0)}{\partial y^k} + b_1 \frac{\partial^k w(p-x,0)}{\partial y^k} + (-1)^k b_2 \frac{\partial^k w(x,q)}{\partial y^k} + (-1)^k b_3 \frac{\partial^k w(p-x,q)}{\partial y^k} =$$

$$= a_0 b_0 \varphi_k(x) + a_1 b_0 \varphi_k(p-x) + (-1)^k a_2 b_0 \psi_k(x) + (-1)^k a_3 b_0 \psi_k(p-x) +$$

$$+ a_0 b_1 \varphi_k(p-x) + a_1 b_1 \varphi_k(x) + (-1)^k a_2 b_1 \psi_k(p-x) + (-1)^k a_3 b_1 \psi_k(x) +$$

$$+(-1)^k a_0 b_2 \psi_k(x) + (-1)^k a_1 b_2 \psi_k(p-x) + a_2 b_2 \varphi_k(x) + a_3 b_2 \varphi_k(p-x) +$$

$$+(-1)^k a_0 b_3 \psi_k(p-x) + (-1)^k a_1 b_3 \psi_k(x) + a_2 b_3 \varphi_k(p-x) + a_3 b_3 \varphi_k(x) =$$

$$= \left(a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right) \varphi_k(x) + \left(a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3\right) \varphi_k(p-x) +$$

$$+(-1)^k \left(a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_3\right) \psi_k(x) + (-1)^k \left(a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3\right) \psi_k(p-x) = \varphi_k(x)$$

.

Отсюда

$$\frac{\partial^k u(x,0)}{\partial y^k} = \varphi_k(x), 0 \le x \le p$$

.

Аналогично,

$$\frac{\partial^k u(x,q)}{\partial y^k} = b_0 \frac{\partial^k w(x,q)}{\partial y^k} + b_1 \frac{\partial^k w(p-x,q)}{\partial y^k} + (-1)^k b_2 \frac{\partial^k w(x,0)}{\partial y^k} + (-1)^k b_3 \frac{\partial^k w(p-x,0)}{\partial y^k} =$$

$$= a_0 b_0 \psi_k(x) + a_1 b_0 \psi_k(p-x) + (-1)^k a_2 b_0 \varphi_k(x) + (-1)^k a_3 b_0 \varphi_k(p-x) +$$

$$+ a_0 b_1 \psi_k(p-x) + a_1 b_1 \psi_k(x) + (-1)^k a_2 b_1 \varphi_k(p-x) + (-1)^k a_3 b_1 \varphi_k(x) +$$

$$+(-1)^k a_0 b_2 \varphi_k(x) + (-1)^k a_1 b_2 \varphi_k(p-x) + a_2 b_2 \psi_k(x) + a_3 b_2 \psi_k(p-x) +$$

$$+(-1)^k a_0 b_3 \varphi_k(p-x) + (-1)^k a_1 b_3 \varphi_k(x) + a_2 b_3 \psi_k(p-x) + a_3 b_3 \psi_k(x) =$$

$$= \left(a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 a_3 b_3\right) \psi_k(x) + \left(a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3\right) \psi_k(p-x) +$$

$$+(-1)^k \left(a_2 b_0 + a_3 b_1 + a_0 b_2 + a_1 b_3\right) \varphi_k(x) + (-1)^k \left(a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3\right) \varphi_k(p-x) = \psi_k(x)$$

Значит,

$$\frac{\partial^k u(x,q)}{\partial y^k} = \psi_k(x), 0 \le x \le p.$$

Таким образом, если функция $w(x,y)$ является решением задачи (12) - (14) , то функция $u(x,y)$ построенная по формуле (19) удовлетворяет условиям задачи D-N. Теорема доказана.

Остается исследовать задачу (12) – (14). В работе [1] доказаны следующие утверждения

Теорема 3. Если решение задачи (12) – (14) существует, то оно единственно.

Теорема 4. Пусть в задаче (12) – (14) функции $f(x,y), r(x)$ и $s(x)$ удовлетворяют следующим условиям

$$r(x) \in W_2^2(0,p), r(0) = r(p) = 0, s(x) \in W_2^2(0,p), s(0) = s(p) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial^{k-1} f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \in C(\overline{\Omega}), i+j = k-1, i,j = \overline{0,k-1}, \frac{\partial^k f(x,y)}{\partial y^k} \in L_2(\Omega), \tag{21}$$

$$\frac{\partial^{2l} f}{\partial x^{2l}}(0,y) = \frac{\partial^{2l} f}{\partial x^{2l}}(p,y) = 0, \quad l = 0,1,...,k_0, \tag{22}$$

где

$$k_0 = \begin{cases} \dfrac{k-2}{2}, \ k = 2i, \\ \dfrac{k-3}{2}, k = 2i+1, i = 1,2,..., \end{cases}.$$

Тогда решение задачи (12) – (14) существует и представляется в виде ряда

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) X_n(x), \tag{23}$$

где $w_n(y)$ определяется следующим равенством

$$w_n(y) = \frac{e^{\lambda_n(q-y)} - (-1)^k e^{-\lambda_n(q-y)}}{(-1)^k 2sh\lambda_n q} \left[\frac{r_n}{\lambda_n^k} - \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \frac{f_n^{(k-2-2s)}(0)}{\lambda_n^{k-2s}} + \frac{1}{2\lambda_n} \int_0^q e^{-\lambda_n \eta} f_n(\eta) d\eta \right] +$$

$$+\frac{(-1)^k e^{\lambda_n y}-e^{-\lambda_n y}}{(-1)^k 2sh\lambda_n q}\left[\frac{s_n}{\lambda_n^k}-\sum_{s=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\frac{f_n^{(k-2-2s)}(q)}{\lambda_n^{k-2s}}+\frac{(-1)^k}{2\lambda_n}\int_0^q e^{-\lambda_n(q-\eta)}f_n(\eta)\,d\eta\right]-$$

$$-\frac{1}{2\lambda_n}\int_0^y e^{-\lambda_n(y-\eta)}f_n(\eta)\,d\eta-\frac{1}{2\lambda_n}\int_y^q e^{-\lambda_n(\eta-y)}f_n(\eta)\,d\eta.$$

Здесь

$$f_n(y)=\int_0^p f(x,y)X_n(x)\,dx,\ r_n=\int_0^p r(x)X_n(x)\,dx,\ s_n=\int_0^p s(x)X_n(x)\,dx.$$

В качестве следствия этой теоремы и теоремы 2 приведем следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть в задаче D-N коэффициенты $a_j, j=\overline{0,3}$ такие, что выполняются условия $\varepsilon_j\neq 0, j=1,2,3,4$ и пусть функции $f(x,y),\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\varphi_k(x)\in W_2^2(0,p),\varphi_k(0)=\varphi_k(p)=0,\psi_k(x)\in W_2^2(0,p),\psi_k(0)=\psi_k(p)=0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^{k-1}f(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\in C(\overline{\Omega}),i+j=k-1,i,j=\overline{0,k-1},\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial y^k}\in L_2(\Omega), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^{2l}f}{\partial x^{2l}}(0,y)=\frac{\partial^{2l}f}{\partial x^{2l}}(p,y)=0,\quad l=0,1,...,k_0, \quad (26)$$

где

$$k_0=\begin{cases}\dfrac{k-2}{2},\ k=2i,\\ \dfrac{k-3}{2},k=2i+1,i=1,2,...,\end{cases}$$

Тогда решение задачи (12) – (14) существует и единственно.

Доказательство. Если функции $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ удовлетворяют условиям (24)-(26), то построенная по этим функциям по формуле (15) и (16) функции $r(x)$ и $s(x)$ удовлетворяют условиям (20). Тогда по утверждениям теорем 3 и 4 решение задачи (12) – (14) существует и единственно. Используя решение этой задачи по формуле (19), построим функцию $u(x,y)$. Очевидно, что данная функция обладает гладкостью $u(x,y)\in C^{2,2}_{x,y}\left(\overline{\Omega}\right),\ \frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ и по теореме 2 удовлетворяет всем условиям задачи D-N. Теорема доказана.

1. Данная работа была выполнена при поддержке гранта МОН РК (грант № AP09259074).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука,
2. Kalimbetov B.T., Temirbekov M.A., Khabibullaev Zh.O. Asymptotic solution of singular perturbed problems with an instable spectrum of the limiting operator, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2012, Article ID 120192.
3. Kalimbetov B.T., Imanbaev N.S., Sapakov D.A., Tashimov L. Regularized asymptotical solutions of integro-differential systems with spectral singularities, Advances in Difference Equations, 2013:109 doi:10.1186/1687-1847-2013-109.
4. Калимбетов Б.Т., Сапаков Д.А, Хабибуллаев Ж.Регуляризация интегрального оператора сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы// Вестник ОшГУ, сер. физ.мат. наук. Ош, 2013, № 1.— С. 157 - 163.
5. Линьков А.В. Обоснование метода Фурье для краевых задач с инволютивным отклонением. Вестник СамГУ. – 1999. – № 2. – С. 60 – 66. http://vestniksamgu.ssau.ru /est/1999web2/math/199920004.pdf
6. Turmetov B. Kh., Kadirkulov B.J. An Inverse Problem for a Parabolic Equation with Involution // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – V. 42, No.12. – P. 3006 –3015. DOI: 10.1134/S1995080221120350
7. Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish journal of mathematics. – 2019. – V.43, № 3. – P. 1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71
8. Yarka U., Fedushko S.,Vesely P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation. Mathematics. – 2020. – V.8, № 2108. – P. 1 – 13.doi:10.3390/math8122108
9. Amanov D. On a generalization of the Dirichlet problem for the Poisson equation // Boundary Value Problems. – 2016. – V.2016, No.160. -P.1-15. DOI 10.1186/s13661-016-0668-6
10. Тихонов А. Н. О краевых условиях, содержащих производные порядка превышающие порядок уравнения //Математический сборник. – 1950. – Т.26, № 1. – С. 35 – 56. http: //www.mathnet.ru/links/7e7d764f0a91ef619c5d9a7f983c21b1/sm5867.pdf

11. Бицадзе А.В. К задаче Неймана для гармонических функции // Доклады АН СССР. – 1990. – Т.311. – С. 11 – 13. http://www.mathnet.ru /links /fe5ca9b7550bdfbc2d8308c636b51b41 /dan6715.pdf

12. Баврин И. И. Операторы для гармонических функции и их приложения // Диференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 9 – 15. http://www.mathnet.ru /links/0381fa6038bb957322be642507d4ddfb/de5395.pdf

13. Баврин И. И. Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения // Дифференциальные уравнения. – 1988.–Т.24,№ 9.–С.1629–1631.

14. Карачик В.В., Турметов Б. Х. Об одной задаче для гармонического уравнения // Известия АН Уз ССР, сер. Физ.- мат. наук. – 1990. № 4. – С. 17 – 21

15. Карачик В.В. О разрешимости краевой задачи для уравнения Гельмгольца с нормальными производными высокого порядка на границе // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т.28, №5. – С.907 – 909. http://www.mathnet.ru /links /326f521a3418099bdcd5a1da59ba8900/de7815.pdf

16. Карачик В .В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными высокого порядка на границе // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.32, №3. – С. 1501– 1503. http://www.mathnet.ru/links/0442586d60ee3665742929aa5e35af39/de8963.pdf

17. Карачик В .В. Обобщенная задача Неймана для гармонических функции в полупространстве // Диференциальные уравнения.– 1999. – Т.35, №7. – С.1– 6. http: //www. mathnet.ru/links/e42cb720023265edb739e4ae9327bdd5/de9955.pdf

18. Соколовский В.Б. Об одном обобщении задачи Неймана // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т.34, № 4. – С.714 – 716. http://www.mathnet.ru/links /9fd1fa8e69bac06b436f15be269dc91b/de6523.pdf

19. Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 8. – С. 1089 – 1092. http://www.mathnet.ru/links/d2f5b3d621ba736874cb3cea4feb2ccc/de9065.pdf